Práctica 2
Ceva, Menelao, Arco Capaz y Potencia de un punto

1. Dado un paralelogramo $ABCD$ una recta intersecta a los segmentos AB, AC y AD en puntos P, Q y R tales que se tiene
$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{1}{4}.$$
Calcular AR/RD.

2. Ana, Beto y Carla salen a correr por el parque todos los dias. Cada uno de ellos corre a velocidad constante en linea recta pero lo hacen a distintas velocidades y a lo largo de distintas rectas. Se sabe que Ana y Beto se cruzaron a las 8:10 am, Ana y Carla se cruzaron a las 8:40 am y Beto y Carla se cruzaron a las 9:30 am.

   Demostrar que a las 9am, Ana, Beto y Carla estaban alineados.

3. Las bisectrices exteriores de un triángulo cortan a las prolongaciones de los lados opuestos en tres puntos alineados.

4. Sea ABC un triángulo y consideremos puntos E y F en los lados AB y AC. Probar que BF y CE se intersectan en la mediana desde el vertice A si y solo si EF es paralela a BC.

5. Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos en los lados BC, AC y AB tales que AD, BE y CF se intersectan en un punto. Probar que las rectas EF, DF, DE cortan a BC, AC y AB en tres puntos alineados.

6. Sea ABC un triángulo y P un punto interior. Denotemos por D, E y F las intersecciones de AP, BP, CP con los lados opuestos. Demostrar que se tiene
$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$

7. Dado un triángulo ABC definimos el punto A' como la interseccion de las tangentes por B y C a su circunferencia circunscripta y los puntos B' y C' analogamente. Probar que AA', BB' y CC' son concurrentes.

   El punto de concurrencia es llamado el *punto de Lemoine* del triángulo.

8. Dado un triángulo ABC, los puntos P y Q se dicen que son isogonales conjugados respecto al triangulo si se tienen las siguientes igualdades
$$\angle BAP = \angle CAQ, \quad \angle CBP = \angle ABQ \quad \text{y} \quad \angle ACP = \angle BCQ.$$
Demostrar que el isogonal conjugado de todo punto existe y es unico. Probar además que el ortocentro y el circuncentro son isogonales conjugados y el baricentro y el punto de Lemoine tambien lo son.

9. Sean ABC un triángulo y P un punto en el lado BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle APB$ y $\angle CPA$ cortan a los lados AB y AC en los puntos M y N respectivamente.

   (a) Probar que las cevianas AP, BN y CM concurren.

   (b) Sean I y J los incentros de ABP y APC respectivamente. Probar que $MN \parallel IJ$ sí y solo sí $AM = AN$.

10. Dado un triángulo acutangulo ABC se construyen puntos P, Q y R exteriores al triángulo de forma que se verifiquen las igualdades
$$\angle RAB = \angle QAC = 30^\circ, \ \angle RBA = \angle PBC = 45^\circ \ \text{ y } \ \angle PCB = \angle QBA = 90^\circ.$$
Demostrar que las rectas AP, BQ y CR son concurrentes.

11. Dado un triángulo acutangulo ABC se construyen puntos P, Q y R exteriores al triángulo de forma que se verifiquen las igualdades

$$\angle RAB = \angle QAC = 90^\circ, \ \angle RBA = \angle PBC = 45^\circ \ \text{ y } \ \angle PCB = \angle QBA = 45^\circ.$$

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triangulos BPC, AQC y ARB tienen un punto en comun que coincide con la interseccion de las rectas AP, BQ y CR.

12. Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos en los lados BC, AC y AB. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los tres triángulos AEF, BDF y CDE tienen un punto en común.

13. Dado un triángulo ABC demostrar que

    (a) si O denota el circuncentro entonces $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC$,

    (b) si I denota el incentro entonces $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle BAC$,

    (c) si H denota el ortocentro entonces $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

14. Dado un triángulo ABC demostrar que las reflexiones del ortocentro en los lados caen en la circunferencia circunscripta y forman un triángulo semejante al triángulo ABC.

15. Dado un triángulo ABC con incentro I denotemos por D la segunda intersección de la bisectriz por A con la circunferencia circunscrita al triángulo original. Demostrar que se tiene $DB = DI = DC$.

16. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60^\circ$, demostrar que B, C, O, I y H están en una circunferencia.

17. En un cuadrilatero ciclico los incentros de los cuatro triangulos que se forman son los vertices de un rectangulo y los ortocentros de los mismos cuatro triangulos forman un cuadrilatero congruente al original.

18. En un cuadrilatero ciclico denotemos por P la interseccion de las diagonales y por S, T, U y V los pies de las perpendiculares desde P a los lados. Demostrar que $ST + UV = TU + VS$.

19. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que existe una circunferencia con centro en el lado AB que es tangente a los otros tres lados. Demostrar que se tiene que $AB = BC + AD$.

20. Sean P, P_1, P_2, P_3, P_4 puntos de una circunferencia en ese orden. Probar que $\frac{d(P,P_1P_2)}{d(P,P_2P_3)} = \frac{d(P,P_4P_1)}{d(P,P_3P_4)}$.

21. Sean A, B y C puntos en una circunferencia tales que $AB = BC$. Consideremos dos rectas por el punto B que cortan a la cuerda en dos puntos y al arco de circunferencia que no contiene a B en otros dos puntos. Demostrar que los cuatro puntos forman un cuadrilátero cíclico.

22. Sean ω_1 y ω_2 dos cincunferencias que se intersecan en dos puntos A y B. Para cada punto P en ω_1 definamos el punto Q como la segunda intersección de PA con ω_2. Demostrar que el angulo $\angle PBQ$ es constante.

23. El radio de la Tierra es de 6371 kilómetros. El Aconcagua tiene 6962 metros de altura. ¿A qué distancia está aproximadamente el horizonte si estamos parados en la cima del Aconcagua?

24. Un cuadrilátero ciclico tiene lados $4, 4, 6$ y 8 en ese orden. Calcular la longitud de sus diagonales.

25. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscripto en una circunferencia. Si $AB = 31$ y todos los demás lados miden 81, calcular las longitudes de todas las diagonales del hexágono.

26. Sea $PABCD$ en una circunferencia. Si $ABCD$ es un cuadrado entonces $PA \cdot (PA + PC) = PB \cdot (PB + PD)$.

27. Se tienen dos circunferencias que se cortan en puntos A y B. Si se tiene ademas que las dos circunferencias son tangentes a una recta en P y Q respectivamente demostrar que la recta AB pasa por el punto medio de PQ.

28. Sea $ABCDEF$ convexo tal que $ABCD, CDEF$ y $EFAB$ son cíclicos. Probar que $ABCDEF$ es cíclico.

29. Dado un triángulo, probar que si P y Q son isogonales conjugados entonces los pies de las perpendiculares a los lados están todos en una circunferencia con centro en el punto medio de PQ.

30. Hacer el problema 29 de la practica 1 sin trigonometria!